

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

线性代数笔记8——求解逆矩阵

在第一章中介绍了逆矩阵与奇异矩阵，我们可以通过一个行列式公式计算二维矩阵的逆，那么更多维矩阵的逆如何求解呢？

逆矩阵与方程组

或许用行列式求逆矩阵的做法有些公式化，实际上可以将求逆矩阵看成解方程组：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

由此可以通过解方程组的方式求出逆矩阵。

如果一个方阵与另一个非零矩阵的乘积是零矩阵，那么该矩阵是奇异矩阵，也就是没有逆。例如：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}}_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因为 $AX = 0$ ， A 是奇异矩阵，如果 A 可逆，则有：

$$A^{-1}AX = A^{-1}0$$
$$\text{but } A^{-1}AX = X \neq A^{-1}0 = 0$$

高斯-诺当消元法

解方程组的方式虽然直观，但有些麻烦，可以用高斯-诺尔当(Gauss-Jordan)方法通过消元去求逆矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{增广矩阵}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{r_2=r_2-r_1 \times 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1=r_1-r_2 \times 3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$
$$\begin{matrix} A & & I & & A^{-1} \end{matrix}$$

可以看到，高斯-诺尔当消元法的原理是 AI 通过初等变换，最终得到 IA^{-1}

示例

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3=r_3-r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{r_2=r_2-2r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{r_1=r_1-r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{\text{change } r_2 \text{ and } r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right]$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

示例中经历了四次初等变换，把第*i*行第*j*列的消元记作E_{ij}，即消元后，第*i*行第*j*列的元素为0；第*i*行和第*j*行互换记作S_{ij}，则从A到A⁻¹的变换过程是：E₃₁→E₂₂→E₁₃→S₂₃，写在一起：S₂₃E₁₃E₂₂E₃₁：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{31}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{E_{22}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{E_{13}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{S_{23}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

可以看到，高斯-诺当消元法最终使得 (S₂₃E₁₃E₂₂E₃₁)A = A⁻¹A = I

逆矩阵与方程组

可以将一个方程组转换为矩阵相乘：

$$\begin{cases} 3x + 2y = -3 \\ -x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow Ax = b$$

上式最终变成了向量相乘，这就和普通的代数类似，两边同时乘以A⁻¹：

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
$$Ix = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b$$

现在，可以通过求A⁻¹，然后使用普通的矩阵乘法求解方程组，最终解得x=-3,y=3。

逆矩阵的基础公式

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

相乘矩阵的逆

假设A和B都可逆，那么：

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$
$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

转置矩阵的逆

如果A是可逆矩阵，那么A^T的逆是什么？

将A⁻¹A = I左右两侧同时转置：

$$I^T = I$$
$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$$
$$\Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 线性代数

标签: 逆矩阵, 逆矩阵与方程组, 高斯-诺当消元法

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: 寻找“最好” (3) ——函数和泛函的拉格朗日乘数法

» 下一篇: 寻找“最好” (5) ——无解之解

posted on 2018-08-24 18:07 我是8位的 阅读(5884) 评论(0) 编辑 收藏 举报

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

广告

X

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间：2022年3月8日~3月18日



最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes